

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ  
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)  
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ  
(1<sup>ο</sup> -2<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

**Θέμα Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης  $f$  είναι το σύνολο  $\mathbb{R}$ , τότε το πεδίο ορισμού της  $f \circ g$  είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$ .

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)) = 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{f(x)} \right) = +\infty$

**γ)** Υπάρχει πολυώνυμο  $P(x)$  με διαδοχικές ρίζες τους αριθμούς 2,6,10 τέτοιο ώστε  $P(2) \cdot P(4) \cdot P(8) \cdot P(9) < 0$

**δ)** Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης  $f$  είναι πάντα μικρότερο από ένα τοπικό μέγιστο.

**ε)** Αν η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τότε δεν μπορεί να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής στο ίδιο  $x_0$ .

Μονάδες 10

**Θέμα Β**

**B1.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a^x - 10^x}{a^x + 10^x} \right)$ , για τις διάφορες τιμές του πραγματικού θετικού αριθμού  $a$ .

Μονάδες 5

**B2.** Έστω συνάρτηση  $h$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $x=5$  με

$$h'(5) = 2. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{h(4x+1) - h(x+4)}{x-1} \right).$$

Μονάδες 5

**B3.** Σημείο  $M$  κινείται στον ημιάξονα  $Oy$  και απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων  $O$  με ρυθμό  $6 \text{ cm/sec}$ . Έστω και τα σημεία  $A(0,3)$  και  $B(4,0)$ . Την χρονική στιγμή που το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $A$  να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :

α) Του εμβαδού του τριγώνου  $OBM$ .

Μονάδες 4

β) Της απόστασης  $MB$ .

Μονάδες 4

γ) Της γωνίας  $\widehat{OMB}$ .

Μονάδες 7

**Θέμα Γ**

**Γ1.** Αν  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(2023) = \frac{1}{8}$ ,  $f(2025) = 4$

και  $f(10) \cdot f(20) = f(30) \cdot f(40)$  να αποδείξετε ότι

α) υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(\xi) = 1$

Μονάδες 3

β) υπάρχει  $x_0 \in [10, 20]$  ώστε  $f^2(x_0) = f(10) \cdot f(20)$

Μονάδες 6

γ) η  $f$  δεν αντιστρέφεται.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ισχύει ότι  $h(2)=10$  και  $(x-1)h'(x) = 2x^2 - x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τον τύπο της  $h(x)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των  $\phi(x)=2x^3$  και  $g(x)=3x^2-1$ .

**Μονάδες 5**

### Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{αν } x < 0 \\ e^x + \ln(x+1) - 2 & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ .

**Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη συνέχεια.

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

**Μονάδες 4**

**Δ5.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται.

**Μονάδες 4**

**Δ6.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \alpha$ , για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ .

**Μονάδες 5**

**Καλή Τύχη !**