

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ
(1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 9

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

A3. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται: γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού \mathbb{R} και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

ε) Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 10

Θέμα Β

B1. Αν $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$, $g(x) = \ln x$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ και $g \circ g$.

Μονάδες 10

B2. Να υπολογιστούν τα όρια

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 - 3x}$ (μονάδες 5).

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - \eta\mu x} \right)$ (μονάδες 5).

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sigma\upsilon\nu 2x \cdot \frac{x+1}{x^4+1} \right)$ (μονάδες 5).

Μονάδες 15

Θέμα Γ

Γ1. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$
 $x \in [0, 2\pi]$

Μονάδες 7

Γ2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(3) = 2$ και $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$. Να βρείτε το $f(1)$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} + \lambda x + 20)$

για τις διάφορες τιμές του αριθμού λ

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τις τιμές των αριθμών α , β ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 2} = -2$$

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δ1. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν :

$$f^2(x) = 2xf(x) + 16 \text{ και } f(0) = -4 .$$

Μονάδες 5

Δ2. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$h(x) + e^{h(x)} = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

α) Να βρείτε την μονοτονία της h . (μονάδες 5).

β) Να βρείτε το πρόσημο της h . (μονάδες 5).

γ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} (μονάδες 2).

Μονάδες 12

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{10 - \sqrt{2 - x}}$. Να δείξετε ότι

αντιστρέφεται και να ορίσετε την συνάρτηση g^{-1}

Μονάδες 8

Καλή Τύχη !