

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**  
**Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**  
**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ**  
**(1<sup>ο</sup> -2<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)**

**Θέμα Α**

**A1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^a$  με  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει:  $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h$  με τύπο  $h(x) = 2f(x) - g(x)$  είναι το σύνολο  $D_f \cap D_g$ .

**β)** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**γ)** Αν η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[a, \beta]$  είναι παραγωγίσιμη και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, \beta)$ , τότε η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει το πολύ μια ρίζα στο  $[a, \beta]$ .

**δ)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει η ισοδυναμία:  $f(x) = g(x) \leftrightarrow f'(x) = g'(x)$

**ε)** Αν για τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ ,

τότε πάντοτε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))$ .

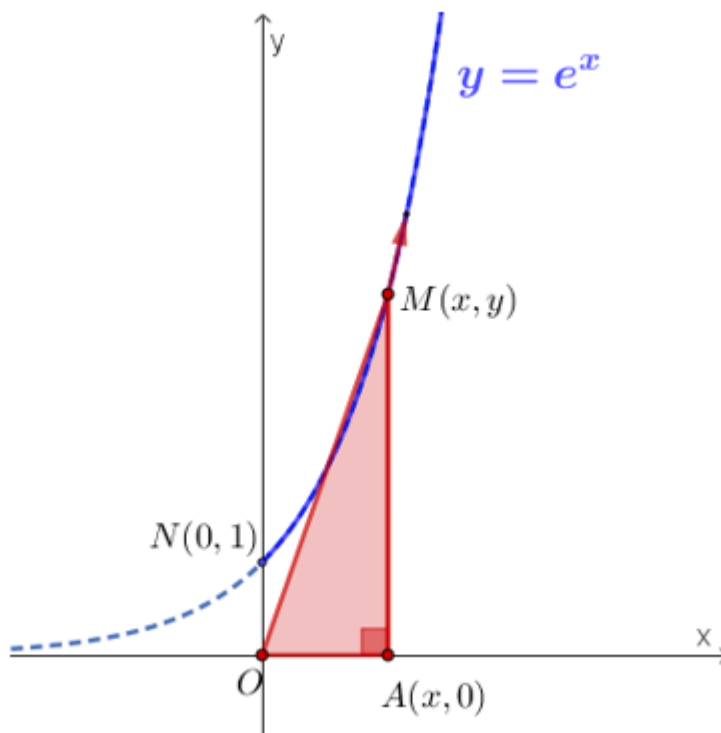
**Μονάδες 10**

**Θέμα Β**

**B1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^x + xe^x = 3e^2$ ,  $x \in (0, +\infty)$  έχει μοναδική ρίζα την  $x = 2$ .

**Μονάδες 10**

**B2.** Ένα κινητό  $M$  ξεκινά από το σημείο  $N(0,1)$  και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = e^x$ ,  $x \geq 0$  έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό  $2\text{cm/sec}$ .



**α)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E$  του τριγώνου  $OAM$ , όπου  $O(0,0)$ ,  $A(x, 0)$  και  $M(x, y)$  είναι  $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$ ,  $x \geq 0$ .

**Μονάδες 5**

**β)** Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού  $E$  είναι  $3e^2\text{cm}^2/\text{sec}$ .

**Μονάδες 10**

**Θέμα Γ**

**Γ1.** Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2}$ . Να βρείτε την παράγωγο  $\varphi'(x)$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$  ώστε  $g(1)<0<g(2)$  και  $g(2023)g(20024)<0$ . Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη προς τον άξονα  $x'$ .

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ , κυρτή. Να δείξετε ότι  $2h(x)<h(x-2)+h(x+2)$  για κάθε  $x\in\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να λυθεί η εξίσωση  $3^x+4^x=5^x$ .

**Μονάδες 5**

**Γ5.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x\rightarrow+\infty}(\sqrt{4^x+2^{x+1}+1}-\lambda\cdot 2^x)$  για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ .

**Μονάδες 5**

**Θέμα Δ**

Έστω  $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$  μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με

$f''(x)\neq 0$  για κάθε  $x\in\mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

·  $f''(x)\cdot e^{-x}-(f'(x))^2=0$  για κάθε  $x\in\mathbb{R}$ ,

·  $2f'(0)+1=0$  και

·  $f(0)=\ln 2$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι ισχύει  $f'(x)+1=\frac{e^x}{1+e^x}$ ,  $x\in\mathbb{R}$

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 3**

**Δ3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

**Μονάδες 3**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $2f(x) + x \geq \ln 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 4**

**Δ5.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 4**

**Δ6.** Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  και να υπολογίσετε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$

**Μονάδες 7**

**Καλή Τύχη !**