

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ
(1^ο -2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$

τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση.

β) Αν η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις f, g είναι οπωσδήποτε συνεχείς στο x_0 .

γ) Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)$ είναι το $[2, 10]$ τότε η γραφική παράσταση C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

δ) Αν $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f(x) = e^x + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Ισχύει ότι $(a^x)' = xa^{x-1}$

Μονάδες 10

Θέμα Β

B1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x+5}{e^x-1}$, $g(x) = \ln x$.

α) Να ορίσετε την συνάρτηση gof .

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι η gof αντιστρέφεται και να βρείτε την αντιστροφή της.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(f(x)))$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(f(x)))$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(f(x)))$

Μονάδες 9

B2. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

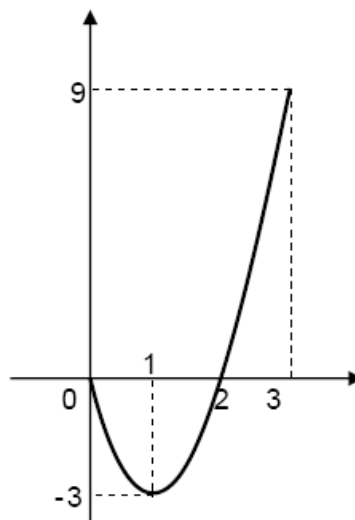
$\varphi(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x - 2}{2x - 1}$ να έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 3x - 1$.

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0)=2, f(1)=0$

- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν τα,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2}$$
 δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 6

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ για το οποίο δεν

υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 7

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και $g(x) = \ln^2 x - \frac{1}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

Μονάδες 7

Καλή Τύχη !

Σ.ΑΒΔΑΛΑΣ