ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε να αποδείξετε ότι

$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 4

Α3. Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

β) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

γ) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι fog=gof.

δ) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε x ε $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και δεν είναι αντιστρέψιμη τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

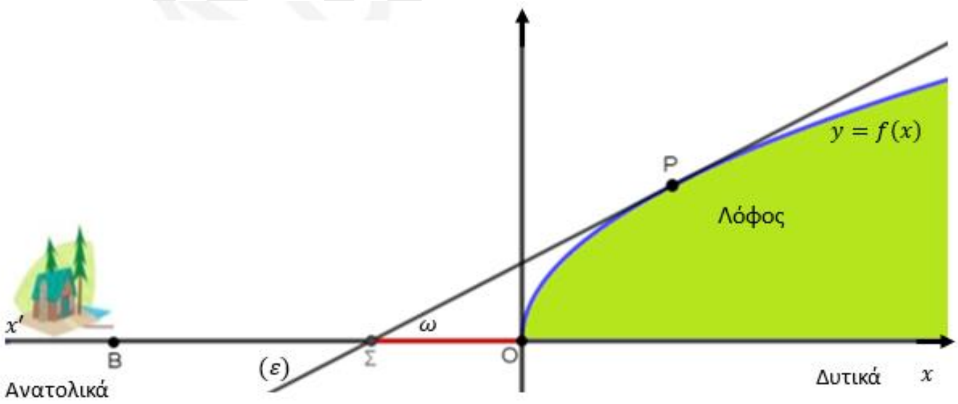
Μονάδες 10

Θέμα Β

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση B του αρνητικού ημιάξονα Ox'. Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox, υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.

Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του $O\Sigma$, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο O του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά.

Ας είναι $\widehat{\omega} = P\hat{\Sigma}O$.



B1. Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Σ είναι $x_\Sigma = -x_P$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει

$$\varepsilon\varphi\big(\omega(t)\big) = \frac{1}{2}\big(x_P(t)\big)^{-\frac{1}{2}}.$$

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά $(O\Sigma)$ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία ω μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16}\,rad$ ανά λεπτό.

Μονάδες 10

Δίνεται ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega$.

Θέμα Γ

Γ1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\eta\mu x}{x^3} = 2024$.

α) Να δείξετε ότι:
i) f(0)=0

Μονάδες 3

ii) f΄(0)=1.

Μονάδες 4

β) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και f΄(x)>f(x) για κάθε x ∈ $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i) xf(x)>0 για κάθε x≠0.

Μονάδες 5

ii) $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,για τις οποίες ισχύει $h^2(x) = x^2 - 4x + 4$, για κάθε x ∈ $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to R$, με $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\ln 2}$ και $f(e)=\frac{1}{e}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- f (x) ≠ 0 για κάθε x∈(0,1)U(1,+∞)
- $f'(x)=-(\ln x+1)\cdot f^2(x)$ για κάθε x∈(0,1)U(1,+∞)

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, x∈(0,1)U (1,+∞).

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης Cf της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση Cf της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της Cf στο σημείο της (e , f (e)) και την ευθεία x = 4.

Μονάδες 7

Καλή Τύχη !