

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ

Θέμα Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$.

β) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα xx είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx .$$

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

ε) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

Μονάδες 10

Θέμα Β**B1.** Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x) = e^x + x - 1$.α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της ϕ^{-1} .

Μονάδες 4

β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^e \phi^{-1}(x) dx$.

Μονάδες 4

B2. Να δείξετε ότι $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx < 1/3$.

Μονάδες 5

B3. Αν η συνάρτηση g είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ και $g'''(0) = 12$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^3}$.

Μονάδες 5

B4. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} . Ισχύει $f(1)=2$ και $f(f(x))+f(x)=10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότια) Η f δεν αντιστρέφεται.

Μονάδες 3

β) $f(7,999)=2,001$.

Μονάδες 4

Θέμα Γ**Γ1.** Έστω η συνάρτηση g συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi \in (1,6)$ τέτοια ώστε να ισχύει :

$$2g'(\xi_1) + 3g'(\xi_2) + 5g'(\xi_3) = 10g'(\xi)$$

Μονάδες 7

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{4 \ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = \frac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δ1. Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tx}$, για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$.

Μονάδες 5

γ) Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t > 0$.

Μονάδες 5

δ) Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

Μονάδες 5

Καλή Τύχη !

Σ.ΑΒΔΑΛΑΣ