ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|,\ x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(ln|x|)'=\frac{1}{x}$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR , τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ = [xf(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$$

γ) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και f(x)<0 κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με f(α)<0 και υπάρχει ξ ε (α,β) με f(ξ)=0 τότε υποχρεωτικά f(β)>0 .

Μονάδες 10

Θέμα Β

Β1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (1 + e^x) e^x dx$.

Μονάδες 5

Β2. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $f(x)$=κ $\sigma\upsilon\nu x$−$\kappa^2 \eta\mu x$+1,κ∈ℝ−{0}. Αν η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0,$\pi/2$]
α) Να βρείτε την τιμή του κ .

Μονάδες 3

β) Να βρείτε τιμή ξ, για την οποία ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0,$\pi/2$].

Μονάδες 5

Β3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση h:[0,2]→ℝ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία O(0,0) και A(2,4). Αν η h είναι κυρτή στο διάστημα [0,2],
α) Να δείξετε ότι h(x)≤2x,∀x∈[0,2].

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι $\int_0^2 h(x) dx \leq 4$

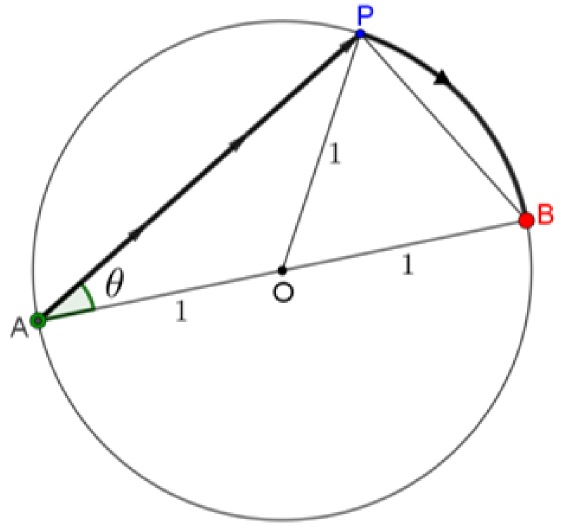
Μονάδες 4

Β4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2^{x+2} - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$

Μονάδες 4

Θέμα Γ

Γ1. Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α μια κυκλικής λίμνης ακτίνας 1 Km και θέλει να φτάσει στο σημείο Β της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα $3\ Km/h$ και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα $6\ Km/h$. Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $P\hat{A}B$ είναι $\theta\ rad$.



α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το Α στο Β είναι

$f(\theta) = \frac{1}{3} \cdot (2\sigma\upsilon\nu\theta + \theta), 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right]$.

Μονάδες 5

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $x\ rad$ σε κύκλο ακτίνας R, είναι $S = x \cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

Γ2. Έστω $g: [0,2] \to R$ μια συνάρτηση συνεχής για την οποία ισχύει

$e^{-x}g(x)dx \geq 1$ για κάθε $x \in [0,2]$ και $\int_o^2 g(x)dx = e^2 - 1$. Να βρείτε

την g.

Μονάδες 10

Θέμα Δ

Έστω f :R→R μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 1 και τα μόνα κοινά σημεία της με τον άξονα x΄x έχουν τετμημένες –2 και 4. Επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Δ1. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $f(-\frac{9}{2})$ και τη μονοτονία της f στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(-0,4)x^4+f(1,2)x^2+4}{f(-1)f(5)x^3+f(2,4)x+f(2,6)}$

Μονάδες 6

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) + f(e^{3x}) = f(e^{2x}) + f(e^{4x})$.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-2,4)$ τέτοιο ώστε

$f^2(x_0) = \sqrt[4]{f^3(-0,2)f(3)}$.

Μονάδες 6

Καλή Τύχη !