

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ
(3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

Θέμα Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι :

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

A2. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Μονάδες 4

A3. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Δεν μπορεί να είναι ίσες συναρτήσεις μία συνάρτηση με μία παράγουσα της.

β) Το ολοκλήρωμα $\int_1^e \ln x dx$ είναι καλώς ορισμένο.

γ) Ισχύει η ισοδυναμία $\int_a^\beta f(x) dx = 0 \Leftrightarrow a = \beta = 0$

δ) Ισχύει: $\left(\int_a^\beta f(x)dx\right)' = 0$

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ παριστάνει εμβαδόν.

Μονάδες 10

Θέμα Β

B1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $I = \int_0^1 (2x + x^2)e^x dx.$

Μονάδες 5

β) $K = \int_0^1 \frac{2}{x^2-4} dx.$

Μονάδες 5

B2. Έστω g συνεχής στο $[0, a]$ με $a > 0$.

α) Να δείξετε ότι :

$$\int_0^a g(x)dx = \int_0^a g(a-x)dx = \frac{1}{2} \int_0^a [g(x) + g(a-x)]dx.$$

Μονάδες 4

β) Να υπολογιστεί το $\int_0^{10} \frac{x^{2004}}{x^{2004} + (10-x)^{2004}} dx.$

Μονάδες 6

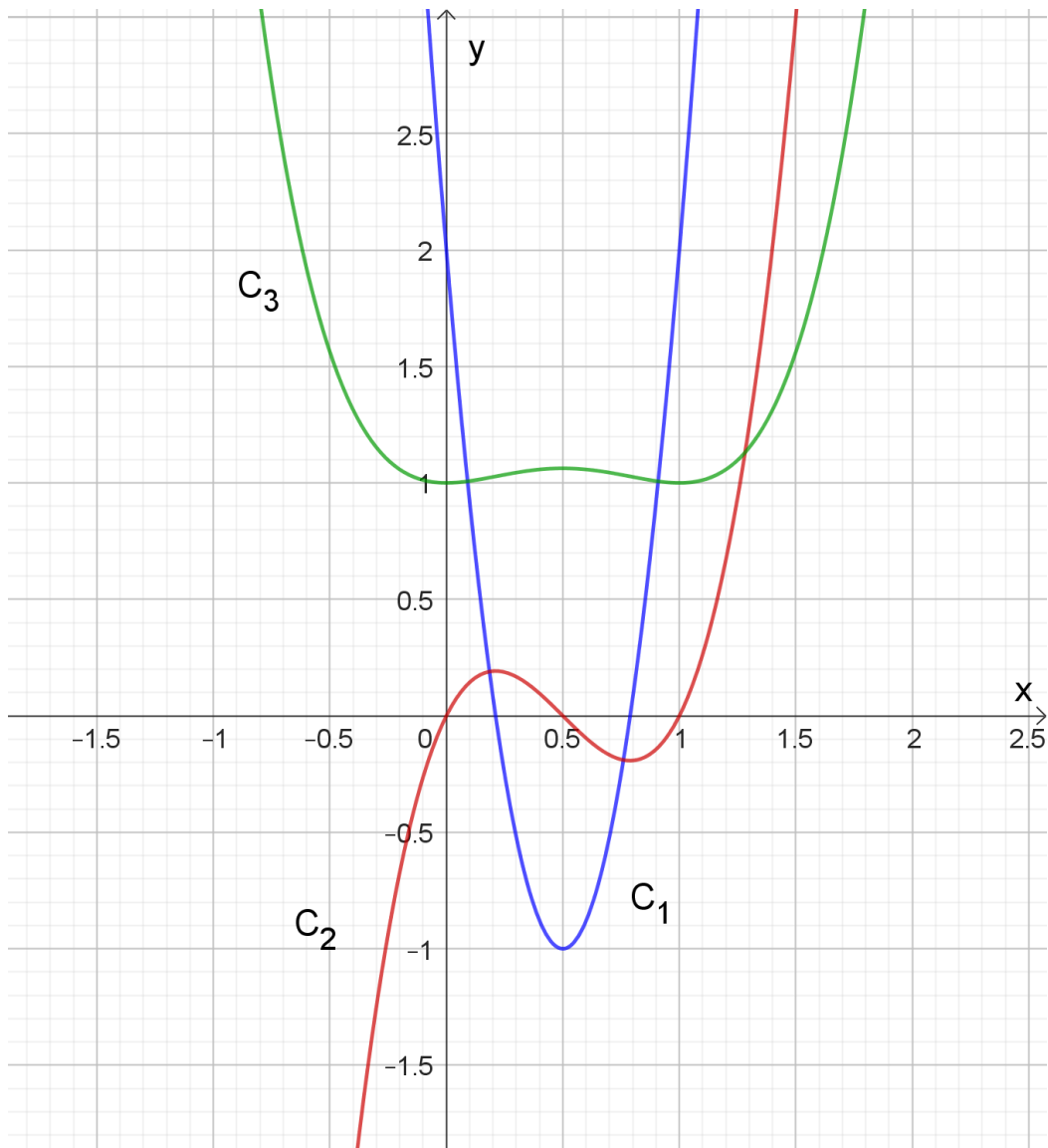
B3. Αν $\int_a^\beta h(x)dx = 1, \int_\gamma^\delta \varphi(x)dx = 6$, να υπολογίσετε το

$$\int_a^\beta \left(\int_\gamma^\delta \varphi(y)h(t)dy \right) dt.$$

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F , όπου F μία αρχική της f στο \mathbb{R} .



Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τεταγμένες $\frac{1}{2}, 1$. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2 ,

Γ1. Να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Γ2. Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F .

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F .

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g(0)=1$ και $g'(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{g(t)}{t} dt = \ln 2$.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Αν F μία παράγουσα της f στο \mathbb{R} , τότε :

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $F(x) > F(0) + x$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x F(x)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

Δ3. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = 5$ χωρίζεται από την ευθεία $y = \alpha^2 + 1$, $\alpha > 0$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 6

Καλή Τύχη !