

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**  
**Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**  
**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ**  
**(1<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΜΕΧΡΙ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 2.4 ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)**

**Θέμα Α**

**A1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

**β)** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντοτε συνεχής στο  $x_0$ .

**γ)** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$  τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

**δ)** Ισχύει ότι  $|\eta\mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**ε)** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  με  $f(a) < 0$  και υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$  με  $f(\xi) = 0$  τότε υποχρεωτικά  $f(\beta) > 0$

**Μονάδες 10**

**Θέμα Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(\alpha, f(\alpha))$  έχει εξίσωση  $y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3$ .

**Μονάδες 8**

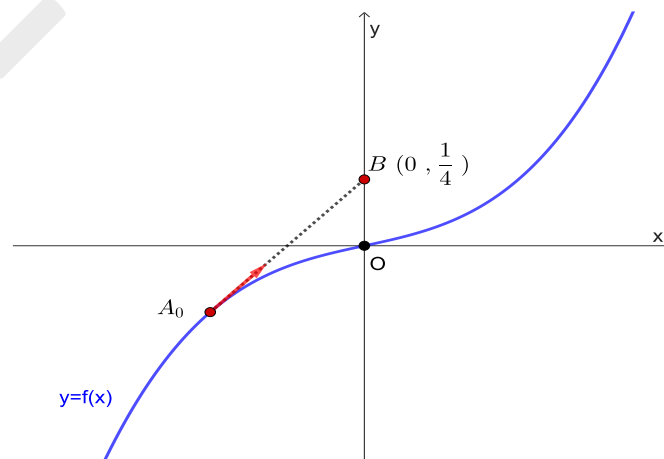
**B2.** Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο  $Oxy$  και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t_0$ , που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο  $A_0$ , οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο  $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$ .

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $A_0$ .

**Μονάδες 8**

**β)** Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή  $t_0$ , είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

**Μονάδες 9**



**Θέμα Γ**

**Γ1.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $h: R \rightarrow R$  για την οποία ισχύει

$e^{h(x)}(e^{h(x)} - 6x) = 9$  για κάθε  $x \in R$ ,  $h(0)=\ln 3$ . Να βρείτε τον τύπο της  $h(x)$ .

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Δίνεται η  $f(x) = 3x - e^{-x} + 1$ .

**α)** Να βρείτε τις ρίζες, το πρόσημο της συνάρτησης  $f$  και το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

**β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in R$  για το οποίο ισχύει:

$$f(e^{x_0}(3x_0 - 2.022)) = 4 - \frac{1}{e}$$

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \ln x + 4x - 1$ .

**α)** Να δείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται.

**Μονάδες 2**

**β)** Αν γνωρίζουμε ότι η  $g^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g^{-1}$  στο  $x = 3$ .

**Μονάδες 5****Θέμα Δ**

**Δ1.** Δίνεται η συνεχής και 1-1 συνάρτηση  $h: R \rightarrow R$  για την οποία ισχύει  $h(-1)h(1) < 0$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(x - 5)h(x) = x^2 - 10x + 24$  έχει μια τουλάχιστον λύση στο  $(4,6)$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{x}$

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $\varphi(x) = x^{\ln x}$

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ . Να βρείτε το πρόσημό της .

**Μονάδες 5**

**Δ5.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $\tau(x) = x^2 + 2$  και  $\alpha(x) = -x^2$ . Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων τους.

**Μονάδες 5**

**Καλή Τύχη !**