

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**  
**Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**  
**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ**

**Θέμα Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση  $G(x) = F(x) + \ln 3$  είναι παράγουσα της  $f$ .

β) Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f(x) = \eta \mu x$ , τον άξονα  $x'x$  και τις κατακόρυφες ευθείες  $x=0$  και  $x = \pi$ , ισούται με 2.

γ) Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  να ισχύουν το Θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση  $f$ .

δ) Αν η συνάρτηση  $f+g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε και οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι οπωσδήποτε συνεχείς στο  $x_0$ .

ε) Αν η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  τότε δεν μπορεί να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής στο ίδιο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

### Θέμα Β

Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , συνεχή στο  $x_0 = 0$ , για την οποία ισχύει  $xf(x) = \eta\mu x$  για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

**B1.** Να βρείτε το  $f(0)$ .

**Μονάδες 3**

**B2.** Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**Μονάδες 5**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Μονάδες 8**

**B4.** Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \leq \frac{1}{4}$

**Μονάδες 7**

### Θέμα Γ

**Γ1.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , για τις οποίες ισχύει  $h^2(x) = x^2 - 6x + 9$ , για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\alpha x^2 + \alpha^2 x - 16}{x^2 - 6x + 8} \right)$  για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ .

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Ένα κινητό  $M$  κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^2 + 4x$  και η τετμημένη του  $x$  αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Η

προβολή του σημείου  $M$  πάνω στον άξονα  $x$  είναι το σημείο  $A$ .

α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $OAM$ , όταν το σημείο  $M$  έχει τετμημένη ίση με  $2$ .

**Μονάδες 5**

β) Έστω  $\varepsilon$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M$  και  $\Sigma$  το σημείο τομής της  $\varepsilon$  με τον άξονα  $y$ . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του  $\Sigma$ , όταν το  $M$  έχει τετμημένη ίση με  $2$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_{-2}^2 x^{2023} \sin x dx$

**Μονάδες 5**

### Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{2f(x)} + e^{f(x)+1} + f(x) - 2e^2 = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε

$$e^{\xi} + e = (2e^2 - \xi)e^{-\xi}.$$

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 5**

**Δ5.** Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) \leq x$  και να αποδείξετε ότι  $f(x) - 1 \geq 0$  για κάθε  $x \geq 1$ .

**Μονάδες 5**

**Καλή Τύχη !**